

Baryon Chemical Potential in AdS/CFT

Shin Nakamura

Asia Pacific Center for Theoretical
Physics (APCTP)

My related works: S.N.-Seo-Sin-Yogendran,
hep-th/0611021 and arXiv:0708.2818
and S.N. arXiv:0711.1601

動機

quark-hadron 系の興味深い現象は**強結合**領域に存在する場合が多く、その場合、QCDの**非摂動的**解析が必要となる。

(例: RHIC quark-gluon plasma)

Lattice QCD: 第一原理に基づく計算

しかし、残念ながら技術的に難しい計算も存在する:

- **有限 baryon 密度** (**有限化学 potential**) の系.
- **時間発展**する系.
- **大きなサイズ**の系.
-

このような問題に **AdS/CFT** を用いたらどうか。

AdS/CFT における **baryon** 化学ポテンシヤル

Baryon 化学ポテンシヤルを導入する試みは2006年頃から始まった:

初期の論文:

- Kim-Sin-Zahed (D4-D8-D8)
- Horigome-Tanii (D4-D8-D8)
- S.N.-Seo-Sin-Yogendran (D3-D7)
- Kobayashi-Mateos-Matsuura-Myers-Thomson (KMMMT) (D3-D7)

多くの成果が得られているものの、まだ完全な
枠組みは完成していないと言える。

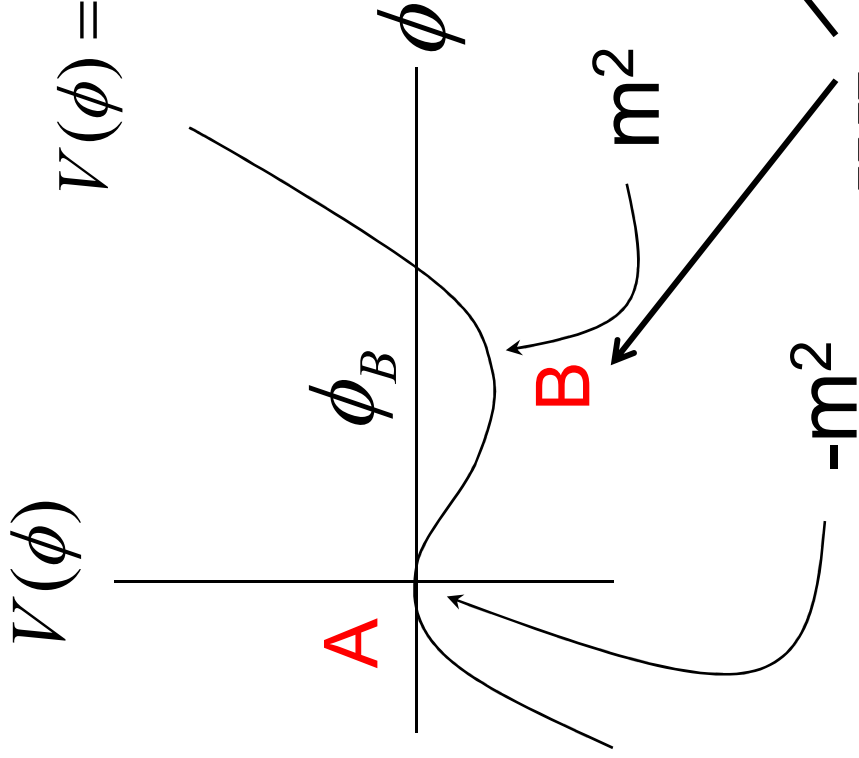
では、何が理解され、何が問題として残っているのか、
formalismの視点から概観してみたい。

AdS/CFTとは何か?

アナロジー: Euclidean ϕ^3 理論

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{3!}\lambda\phi^3$$

$$\phi_B = \frac{2m^2}{\lambda}$$



2つの解:

A: $\phi=0$ “trivial” vacuum

B: $\phi=\phi_B$ “non-trivial” vacuum

問題: この真空まわりの物理を記述したい。
どうするか?

“Non-trivial” vacuumまわりの物理

2つの等価な方法:

1. “Non-trivial” vacuumまわりの摂動論:

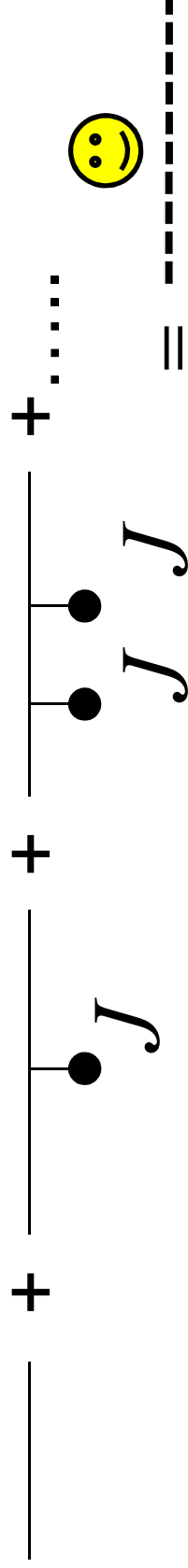
$$\phi = \phi_B + \varphi \leftarrow \text{dynamical}$$

φ の言葉では、場は期待値を持たない。

2. “Trivial” vacuum周りの摂動論に
sourceを加えたもの:

ϕ の言葉では、場は期待値を持っている。
dynamical $J\phi$: 一点関数、あるいは
source termが存在。

従って、"trivial vacuum"まわりで計算しようとする



- 一点関数の挿入された**無限種類**のdiagramを**足し合わせる**必要がある。
- (もちろん、Jが小さい場合は、Jの高次を無視して構わない。)



しかし、"non-trivial vacuum"まわりの摂動論で**直接**計算するとdiagramは単純。(一点関数は**存在しない**。)

例えば古典的2点関数であれば一つのdiagramが良い。

無限個のdiagramの計算が、注目する真空を変えると一発で出来てしまう例がある。

同じ事を超弦理論でやってみる。

超弦理論の_(低エネルギーでは10次元の超重力理論)の2つの解:

曲った時空: ここではblack 3-brane solution
(non-trivial vacuum)

平坦な時空: (trivial vacuum)

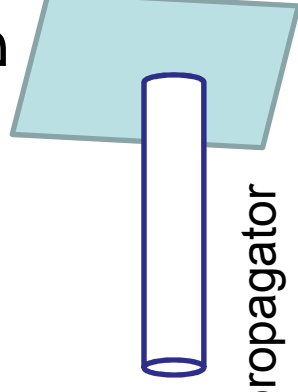
弦理論では**平坦な時空まわりの摂動論**が整備されているので、
これを用いて、**曲った時空**まわりの物理を記述してみる。



一点関数の挿入が必要

弦理論(closed string)の一点関数:

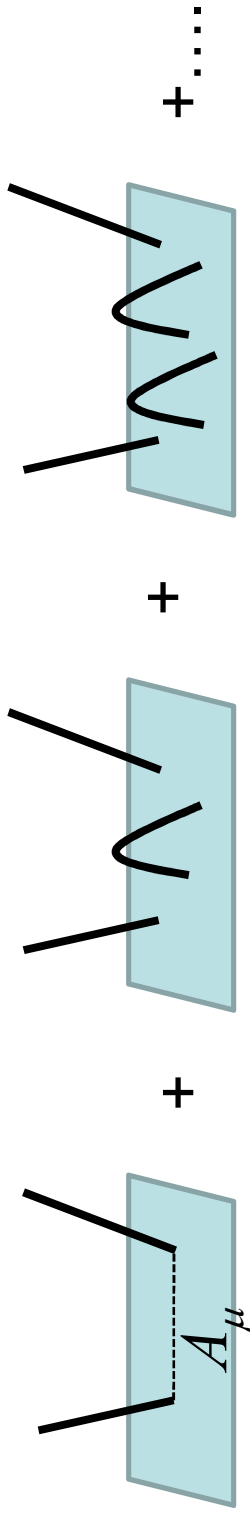
D-brane



closed string のpropagator

つまり以下の二つの計算が等価になると考えられる

平坦な時空で、D-braneの入った無限個のdiagramを扱う計算



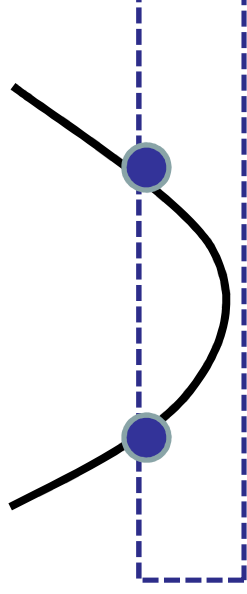
D-brane上にはYM理論が存在する。

D-braneの自由度のみ取り出す操作(near-horizon limit)を行うと。。。。

😊 曲った時空 (D-braneなし)でのdiagramによる単純計算

YM理論に対する
sourceはAdSの
境界で与えられる。

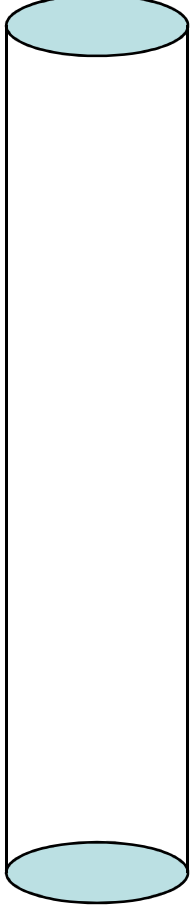
AdS空間となる



教訓

1. **考えたいYM理論**がその上に存在するような D-braneのセットアップを考える。
2. そのD-braneに対応する**曲った時空**をみつける。
3. D-brane上の自由度(YM理論)のみ取り出す極限 (**near-horizon limit**)を、**曲った時空**に対して施す。
すると、得られた時空での「**簡単な**」計算が、**YM理論**における「**複雑な**」計算と等価な結果を与えてくれる。

YMの1-loop = 重力のtree



String理論のcylinder diagram

○ closed string (graviton)がpropagateしている

⌋ open string (gluon)がloopを描いている

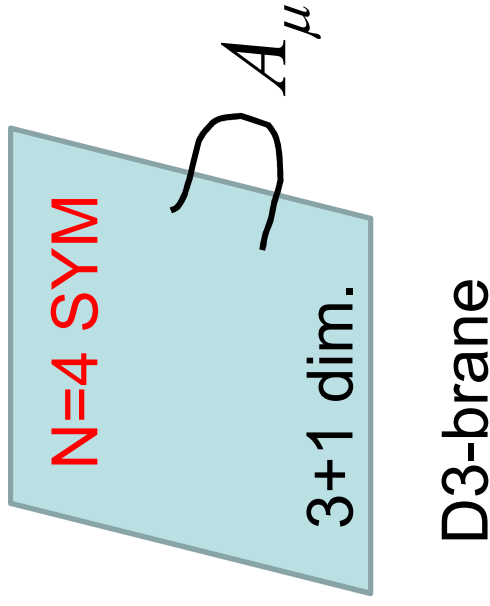
古典

gravitonのtree diagramの和

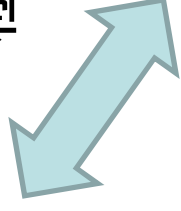
量子

= gluonのloop diagramの和

最も標準的な例



- 重力側で量子重力の効果を無視する極限: YM理論側ではlarge- N_c
- 重力側で高階微分補正を無視する極限: YM理論側では強結合極限



対応する時空のnear-horizon limit

$$AdS_5 \times S^5$$

AdS/CFT

(Weak version)

$AdS_5 \times S^5$ 空間上の**古典**超重力理論

10次元

II conjecture

Maldacena '97

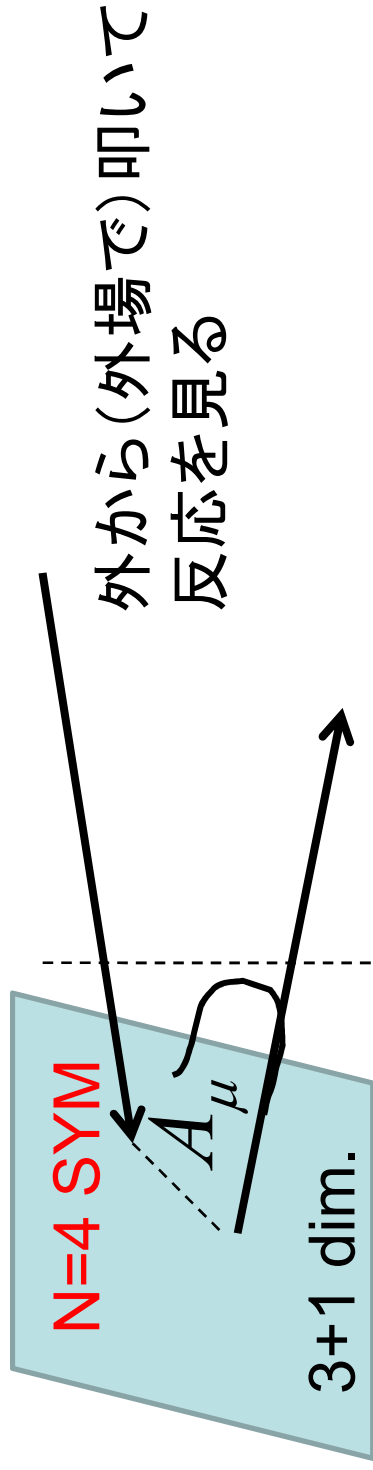
Large 't Hooft coupling における

4次元 large- N_c SU(N_c)

$N=4$ 超対称Yang-Mills理論

強結合量子ゲージ理論

Dictionary (GKP-Witten)

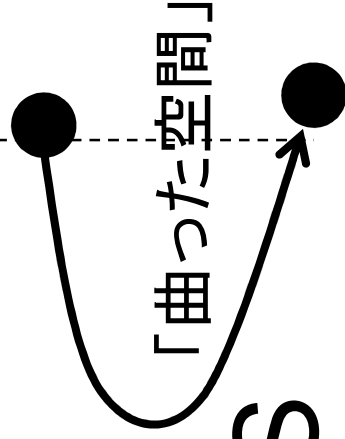


D3-brane

場のモードのうち境界に
近づくにつれて大きくなるモード
(non-normalizable mode)

の境界上の値

= 外場(source)



AdS

boundaryのある空間

Dictionary (GKP-Witten)

場の境界での値

$$W(J) = S|_{on-shell}(J)$$

YM理論の有効作用

重力理論の古典的作用
(境界条件の関数)

Jで微分することで、conjugateなoperatorの期待値が求められる。

有限温度の導入

Euclid化し、時間方向をコンパクト化すれば良い。

この境界条件でsupergravityの方程式を解くと、D-braneの near-horizon limitに対応する**曲った時空**として

- AdS空間の時間方向を周期的にした空間
(**thermal AdS**)
- (漸近的な) AdS空間に**black hole**の存在する空間
(**AdS-BH**)

の2種類の解が存在する。

両者の違いは? confinement / deconfinement

Thermal AdS

- Free energy (重力理論側ではon-shell作用) が $O(1)$
- **低温** 領域で実現される。

Confinement相



AdS-BH

- Free energy が $O(Nc^2)$
- **高温** 領域で実現される。

Deconfinement相

重力理論では、この間のtransitionは**Hawking-Page transition**として知られている。(通常、**1次相転移**)

有限温度AdS/CFT

AdS-ブラックホール $\times S^5$ 上の古典超重力

II conjecture

Witten '98

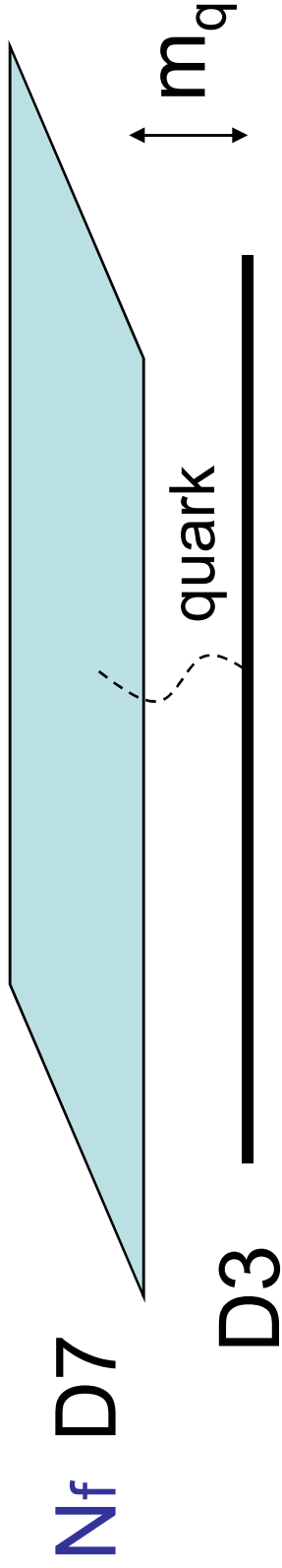
有限温度の4次元、強結合 large- N_c
SU(N_c) $N=4$ SYM理論
(deconfinement phase).

Flavorの導入

N=4 SYM 理論には fundamental quark が入っていない。

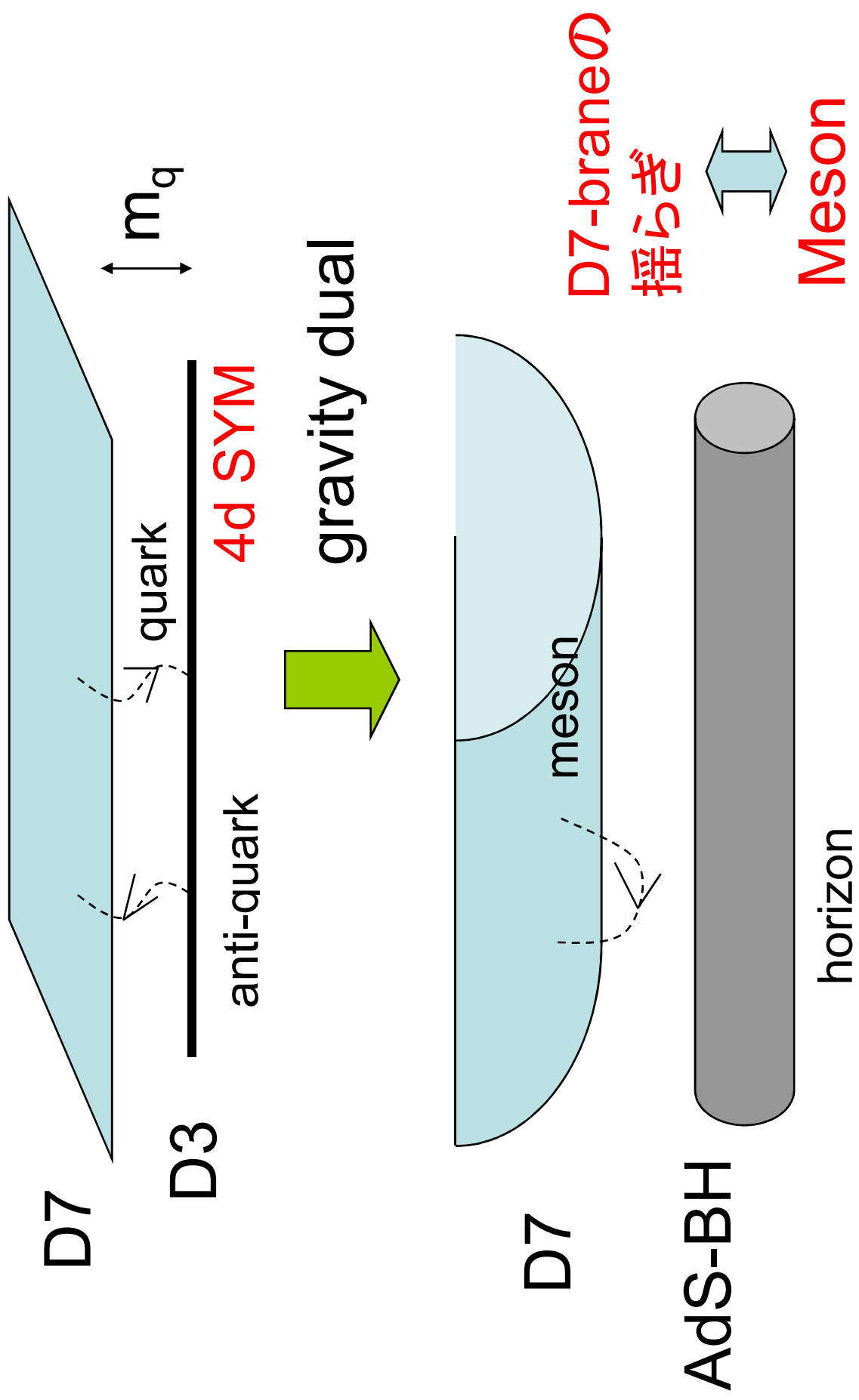
Dp-brane: (p+1)-dim. object

quarkを導入するには:
flavor-braneを導入すればよい。



4d SYM

複数のD7-braneを導入すると、複数のflavor : $U(N_f)$



ここで考えている系: D3-D7 system

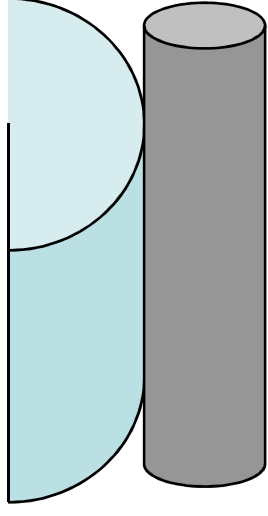
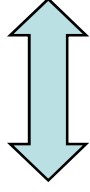
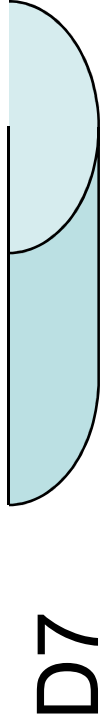
- YM 理論: $N=2$ large- N_c SYM with quarks
- Flavor branes: N_f D7-branes
- Flavor 対称性: $U(N_f)$
- Quark の質量: m_q
- Probe 近似 ($N_c \gg N_f$)
 - flavor braneからの bulk geometry に対する
back reactionを無視。(～quenched 近似)
- Free energy \sim Flavor-brane action

Deconfinement 相において meson系のさらなる相転移が存在

Minkowski branch

Black-hole branch

(mesonのspectrumがgapを持つ) (mesonのspectrumがgap-less)



AdS-BH

1st order

horizon

$T_c < T < T_{\text{dis}}$ $T_{\text{dis}} < T$
← sQGP-likeな相

Deconfinement 相におけるquark-antiquark 結合状態
のある種の “dissociation” 転移とも見なせる。

Mateos, Myers, and Thomson, hep-th/0605046

Albash, Filev, Johnson and Kundu, hep-th/0605088, hep-th/0605175

Karch and O'Bannon, hep-th/0605120

有限 **baryon** 数密度の導入

- もちろん **flavor brane** が必要 (D7-brane)
- $U(1)_B$ 対称性: $U(N_f) \cong U(1)_B \times SU(N_f)$

flavor 対称性の対角成分

D7-brane上では**U(1)**ゲージ対称性にenhanceされている。

$U(1)_B$ charge: この**U(1)** ゲージ場に対する「電荷」

conjugate

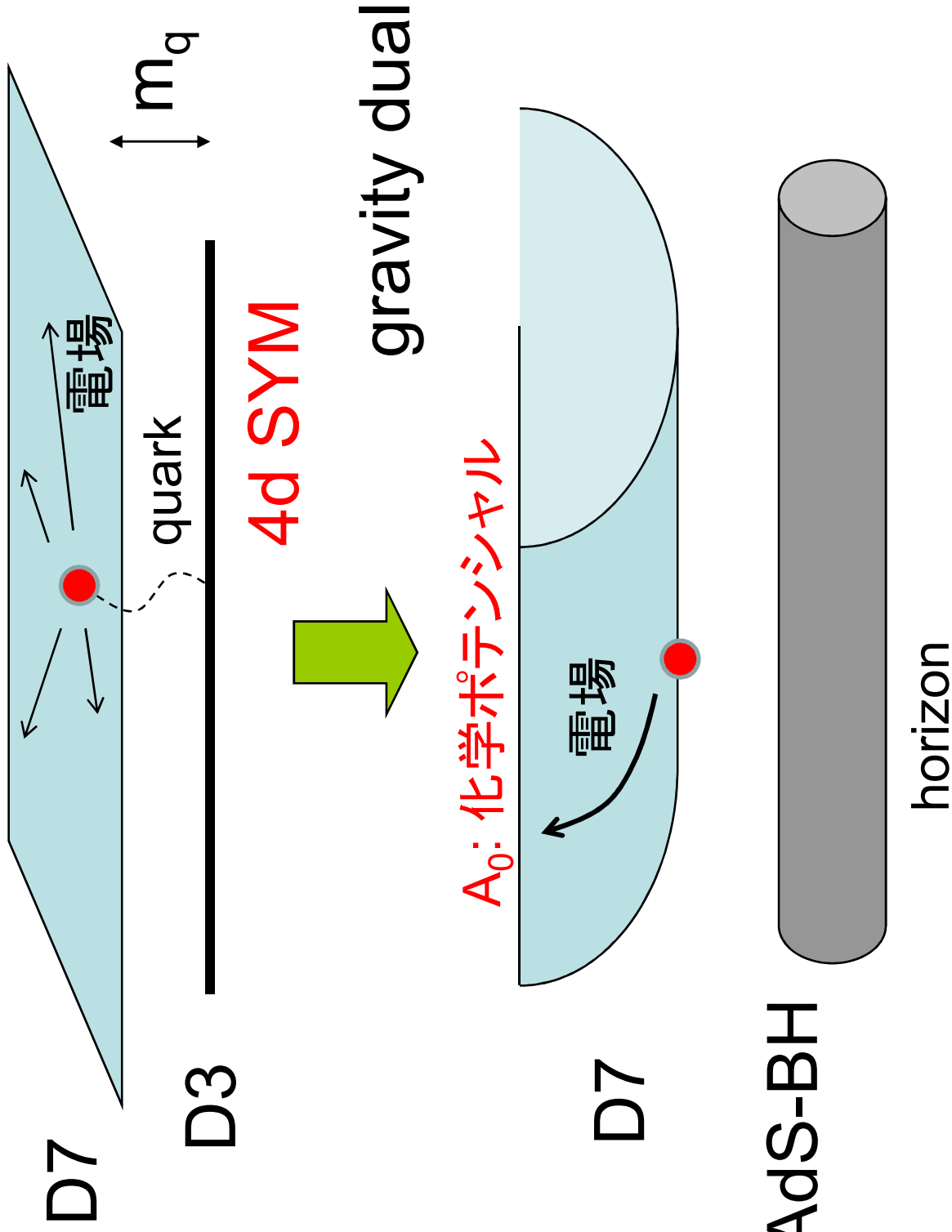
A₀ on the **flavor brane** at the boundary of the geometry



U(1)_B chemical potential

Kim-Sin-Zahed, 2006/8; Horigome-Tanii, 2006/8

stringの端点：電荷として働く



化学ポテンシャルの定義について

S.N.-Seo-Sin-Yogendran, 2006/11, 2007/8

Kobayashi-Mateos-Matsuura-

Myers-Thomson, 2006/11

「ゲージ不変」な定義として:

$$\mu \equiv \int_{\rho_{\min}}^{\infty} d\rho F_{\rho 0} = A_0(\infty) - A_0(\rho_{\min}) = \int_{\rho_{\min}}^{\infty} d\rho A'_0$$

boundary D7 p-derivative

ρ : 5次元方向

AdS-BH

コメント:

「brane上の電場に逆らって、時空の境界から
単位電荷を ρ_{\min} まで持ってくるのに要する仕事」
と言うことも出来るが「時空の境界から5次元方向に
電荷を運ぶ」ことの物理的意味は不明。

境界上の A_0 のみで化学ポテンシヤル を定義することもできる。

Ghoroku-Ishihara-Nakamura (arXiv:0708.3706)

Karch-O'Bannon (arXiv:0709.0570)

有限温度(imaginary time)では

$$A_0(x) \mapsto A_0(x) + \partial_0 \Lambda(x)$$

$$\Lambda(t=0) = \Lambda(t=\beta)$$

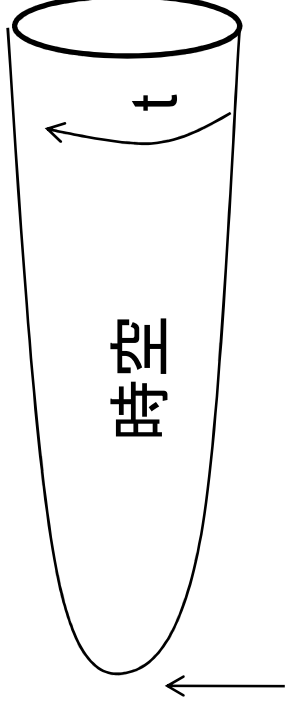
A_0 の絶対値そのものが化学ポテンシヤルとして
の意味を持つことができる。

$$\text{(より正確には } \beta^{-1} \oint_{\text{boundary}} dt A_0 \text{)}$$

この定義の方が、GKP-Wittenの処方から見て、より「自然」とも言える。

この場合、 A_0 のconstant shiftはどのよう
に固定されるのか？

- Flavor braneがblack holeのhorizonに接している場合



Euclideanではhorizon上で「時間」方向がshrinkする。

Horizon上では $A_0 dt$ という1-formがwell-definedに
なるためには $A_0|_H = 0$ ← この条件を満たすように固定。

$\mu = A_0(\infty) - A_0(\rho_{\min})$ の流儀と差はない。

Flavor braneがhorizonに接していない場合

$$F = \Omega + \mu Q \qquad \left. \frac{\partial F}{\partial Q} \right|_T = \mu$$

とconsistentに化学ポテンシャルを定義しようとする

- $Q \neq 0$ でchargeがhorizonに最も近い場所に局在している場合は

$$\mu = A_0(\infty) - A_0(\rho_{\min}) \text{ の定義が自然。}$$

S.N. Prog.Theor.Phys.119(2008)51

- $Q=0$ では $\mu = A_0(\infty)$ の定義は排除されない。
- 5次元空間上での Q の分布がnon-trivialな場合は化学ポテンシャルの定義はさらに複雑となる。

このように、化学ポテンシャルの定義については、
まだ議論の余地がある。

熱統計力学は AdS/CFTでは 古典電磁気学

Flavor braneの作用 (horizonに接する場合):

$$S / (\beta V_3) = \int_{\rho_{\min}}^{\infty} d\rho L(y, y'; A'_0) = \Omega$$

$$L = \int d\Omega_3 \sqrt{\det(G + 2\pi\alpha'F)}$$

A'_0 (電場) の関数: 作用は **grand canonical ensemble** における **grand potential**.

Gauss-law constraint:

$$\frac{\partial L}{\partial A'_0} = -Q \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \Big|_T = -Q$$

「電荷」密度 quark 数密

Legendre 変換

$$H = L - A'_0 \frac{\partial L}{\partial A'_0} \quad \longleftrightarrow \quad F = \Omega + \mu Q$$

5次元方向を「時間」と思った場合の

“Hamiltonian” は **canonical ensemble** における **Helmholtz 自由エネルギー**。

YM 理論側の熱統計力学



重力理論側の古典電磁気学(の解析力学)

このように、有限バリオン化学ポテンシヤルにおけるAdS/CFTのformalismは整備されつつある。

しかし、少なくとも中村個人の意見としては、化学ポテンシヤルとflavor brane上の A_0 の対応のさせ方に、まだ**議論の余地がある**ように思われる。

問題の原因:

バリオンchargeを担うobject(が3+1次元方向に均一分布した状況)を重力理論側で正確に記述できていない。

バリオンchargeを担うもの

quark : string

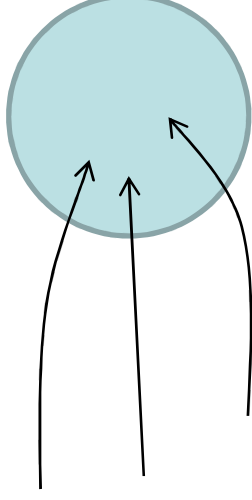
baryon: S^5 に巻きついたD5-brane

- これらの多体系がflavor braneと相互作用している。
この多体問題を解かねばならない。(今後の課題)

バリオンとしてのD5-brane

$$AdS_5 \times S^5 \swarrow$$

ここに巻きついたD5-brane



N_c 本の同じ向きの弦が終端することができる。

quark N_c 個のbound state: **バリオン**

バリオンchargeを担うもの

quark : string

baryon: S^5 に巻きついたD5-brane

- これらの多体系がflavor braneと相互作用している。
この多体問題を解かねばならない。(今後の課題)

その他の課題

- ほとんどの解析は、flavor braneが周囲の時空に影響を及ぼさない近似(probe近似)のもとに行われている。

$N_f / N_c \ll 1$ 、クエンチ近似に対応。

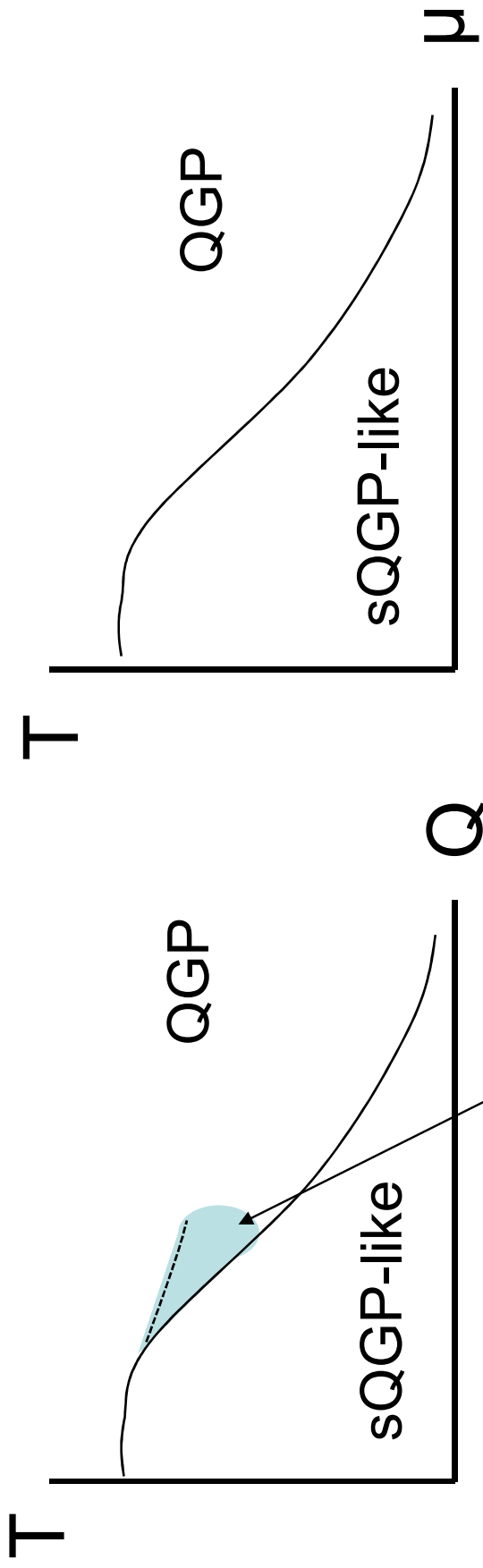
バリオンchargeが大きくなるとこの近似が破綻。

現在、これらの問題の解決に向けて、バリオンの影響を考慮した超重力の解を得る試みを行っている。

まとめ

- AdS/CFTは驚くべき対応関係ではあるが、**非常に自然な考察とstring理論の注意深い解析**の中から得られている。
- バリオン密度の導入方法については**一定の理解**が得られている。しかし、**厳密に有限密度系を再現するためには技術的に解決しなければならぬ問題がまだ存在する。**

D3-D7系の予備的な相図の概略



熱力学的不安定領域

注意：
この系ではconformal対称性のため、
confinement/deconfinement転移温度はゼロ。
系は常に非閉じ込め相にある。

質問

- Large-Nc QCDの有限密度系で調べると面白いか(調べても意味のある)現象は？