

QCDへの

~~AdS / CFT 対応~~ と その応用



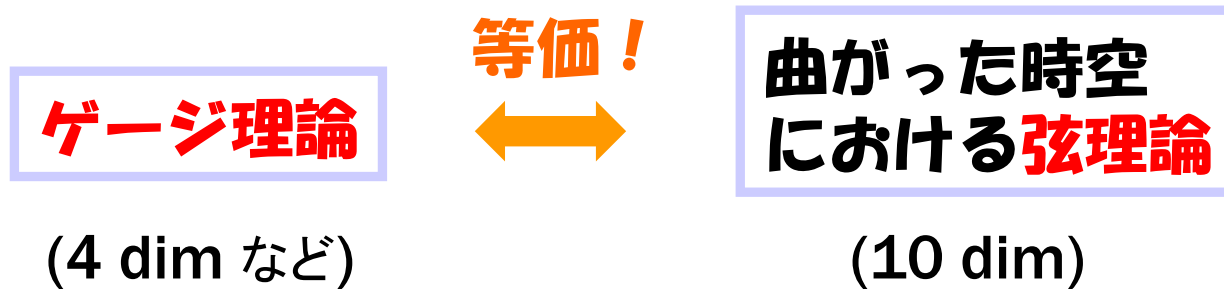
Gauge / String duality

[基礎的事柄の入門的レビュー]

杉本 茂樹 (IPMU)

0 Introduction

“ Gauge / String duality ”



見かけ上、全く違う理論である。
時空の次元も違う。
それなのに“等価”であると主張する。

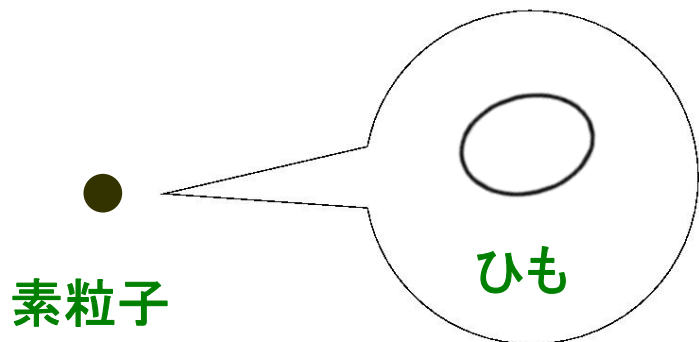
- なぜ、そのようなことがあり得るのか？
- 本当なのか？
- どのように対応しているのか？
- どのような応用があるのか？

Plan

- ① **超弦理論とは？**
- ② ***D-brane と gauge theory***
- ③ **超重力理論における *D-brane***
- ④ ***Gauge / String duality***
- ⑤ ***Application to QCD***
- ⑥ ***Outlook***

① 超弦理論とは？

◆ 弦理論



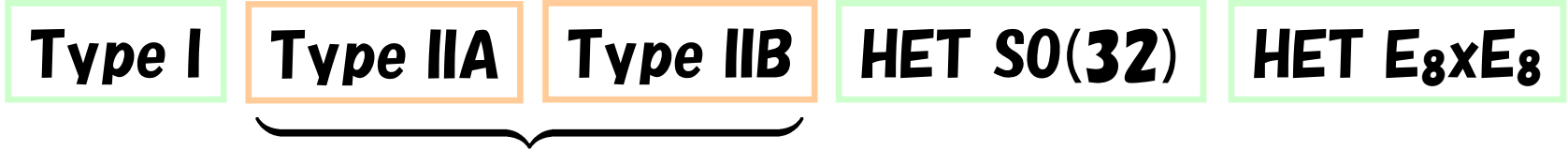
同じひもでも、振動の仕方が違うと性質が異なってくる。

○ ○ 8 → 種類の異なる素粒子に見える。

- クォーク、レプトン、光子、重力子などあらゆる素粒子を **たった一つのひも** で記述できる可能性がある！
- 実際にやってみると、**重力子** を含むことがすぐに示せる。量子重力を含む究極の統一理論の候補と期待されている。

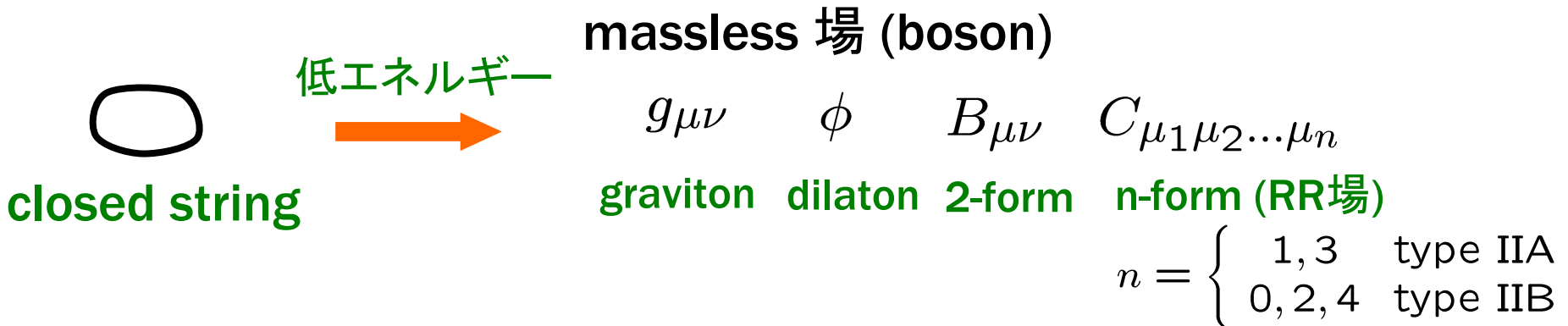
◆ 超弦理論

- Flat で安定な時空を実現する弦理論は **5つ** 知られている。



今日の話はこれらに限定

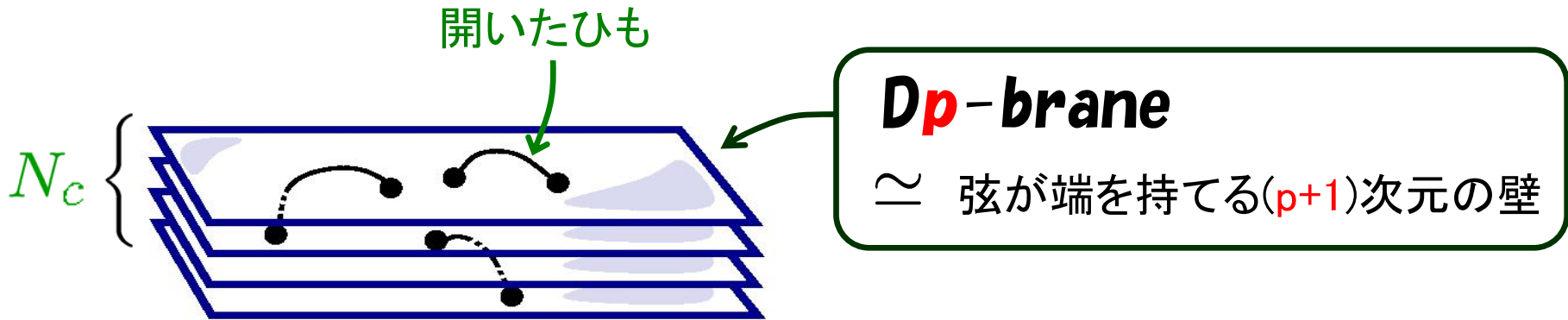
- どれも時空の次元は **10次元** で、超対称性がある
↑
(fermion と boson を入れかえる対称性)
- 低エネルギー有効理論は、10次元の超重力理論 (Supergravity)



② D-brane and gauge theory

★ D-brane とは？

10次元時空に埋め込まれた $(p+1)$ 次元の壁を考える。



A diagram showing a curved line connecting two points labeled a and b . Below it, the text reads $a, b = 1 \sim N_c$.



スピン1 で質量 0 の粒子 (ゲージ場) ができる。

$$(A_\mu)^a_b : U(N_c) \text{ ゲージ場}$$



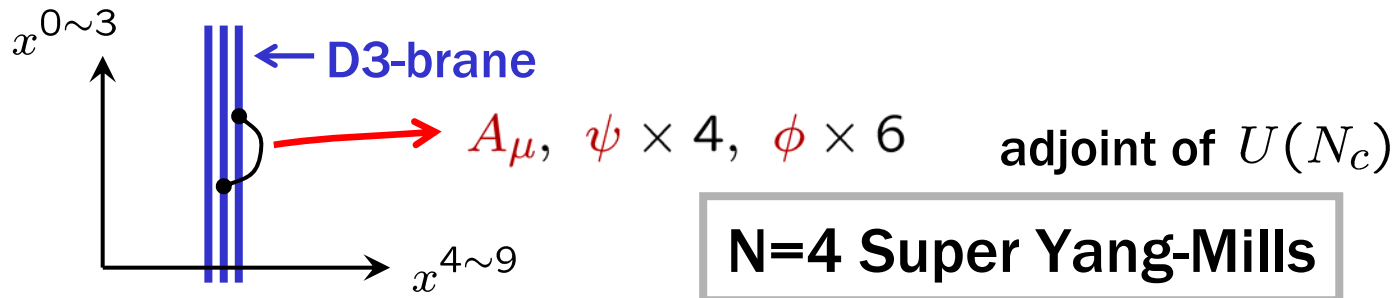
$(p+1)$ 次元 $U(N_c)$ ゲージ理論

が brane の上に実現される！

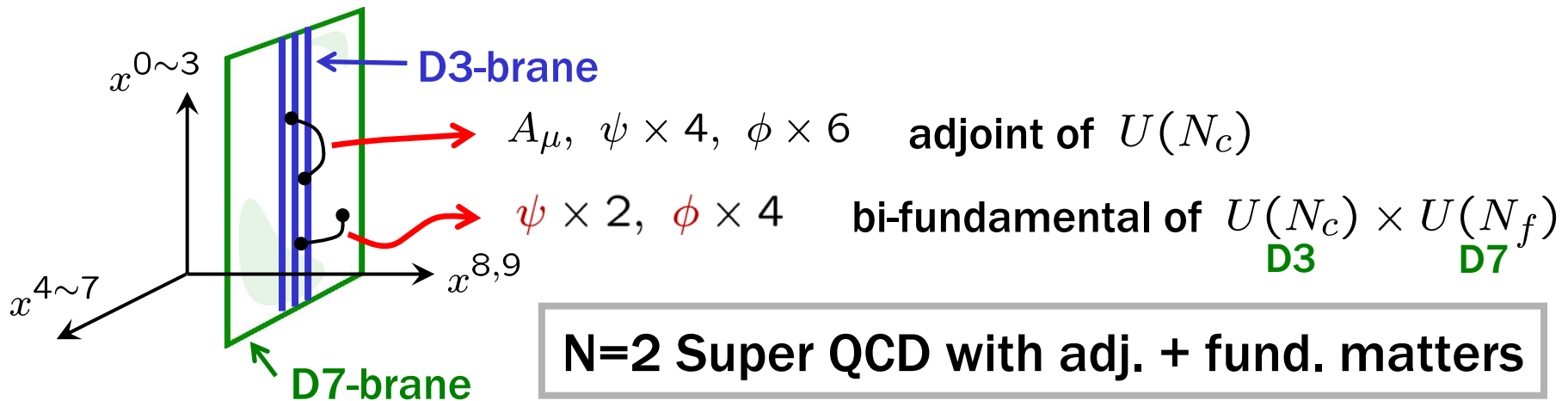
- Brane の配置を工夫すると、いろいろなゲージ理論を実現できる

★ examples

- D3-brane $\times N_c$

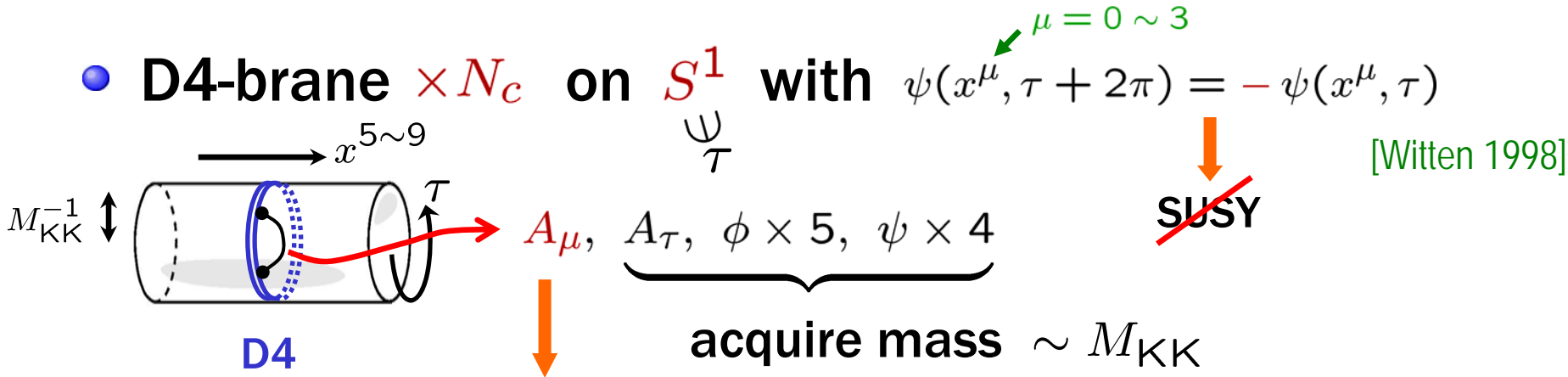


- D3-brane $\times N_c$ + D7-brane $\times N_f$



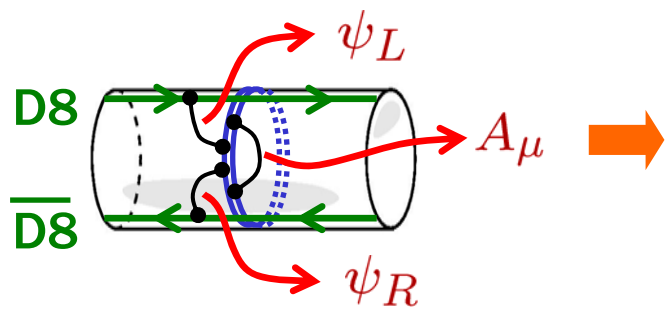
★ more realistic examples

- **D4-brane** $\times N_c$ on S^1 with $\psi(x^\mu, \tau + 2\pi) = -\psi(x^\mu, \tau)$



4 dim pure Yang-Mills (at low energy)

- **The above D4 system + D8-D8 pair** $\times N_f$ [Sakai-S.S. 2004]



	D4	D8	D8-bar
	$U(N_c)$	$U(N_f)_L$	$U(N_f)_R$
A_μ	adjoint	1	1
ψ_L	N_c	N_f	1
ψ_R	N_c	1	N_f

QCD with N_f massless quarks

(at low energy)

3 超重力理論における D-brane

- 一般相対論の教え：重い粒子は時空を曲げる。



Einstein 方程式の解

Schwarzschild 解:

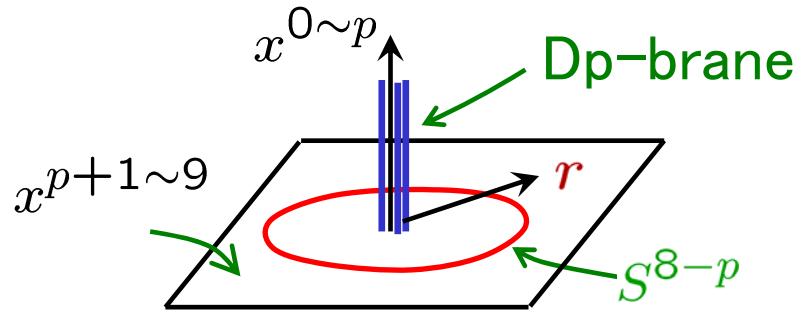
$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

- 同様に、D-brane があると時空が曲がる。



超重力理論の
運動方程式の解

★ Dp -brane 解 (black Dp -brane 解)



$$ds^2 = h(r)^{-1/2} (-f(r) dt^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_p^2) + h(r)^{1/2} \left(\frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{8-p}^2 \right)$$

$$e^\phi = g_s h(r)^{\frac{3-p}{4}} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{S^{8-p}} dC_{7-p} = N_c \leftarrow \text{number of } Dp\text{-branes}$$

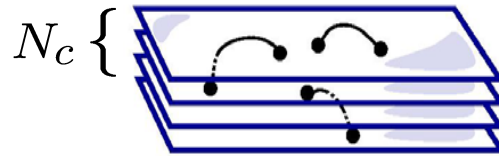
$$h(r) \equiv 1 + \frac{Q_p}{r^{7-p}} \quad f(r) \equiv 1 - \frac{r_0^{7-p}}{r^{7-p}} \quad \rightarrow \text{horizon at } r = r_0$$

Hawking 温度

$$\beta_H = 1/T_H = \frac{4\pi}{7-p} r_0 h(r_0)^{1/2}$$

4 Gauge / String duality

- D-brane がある系を記述する2つの見方



Massive mode や
閉弦との coupling
が切れる limit をとる

さっきの D-brane 解で、
Brane の近傍を取り出す
limit をとる $1 \ll \frac{Q_p}{U^{7-p}}$

対応

$U(N_c)$ gauge theory

曲がった時空における
(closed) string theory

等価!

どちらも同じ系を記述しているので、
二つの見方は等価であると予想される

★ example

[Maldacena 1997]

● AdS/CFT 対応 (の典型例)

Anti de Sitter 空間 ← AdS
Conformal Field Theory ← CFT

D3-brane



String theory in $AdS_5 \times S^5$



N=4 Super Yang-Mills

$A_\mu, \psi \times 4, \phi \times 6$

$$ds^2 = h(U)^{-1/2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + h(U)^{1/2} (dU^2 + U^2 d\Omega_5^2)$$

$$= \sqrt{Q_3} \left(\underbrace{\frac{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2}{z^2}}_{AdS_5} + \underbrace{d\Omega_5^2}_{S^5} \right) \quad \leftarrow z = \sqrt{Q_3}/U$$

dual !

これは CFT であることが知られている。

★ パラメータの対応

N=4 Super Yang-Mills

\simeq

String theory in AdS₅ x S⁵

$$\lambda = g_{\text{YM}}^2 N_c$$

't Hooft coupling

$$g_{\text{YM}}^2 = \lambda / N_c$$



$$Q_3 / l_s^4$$

string length



$$g_s$$

string coupling

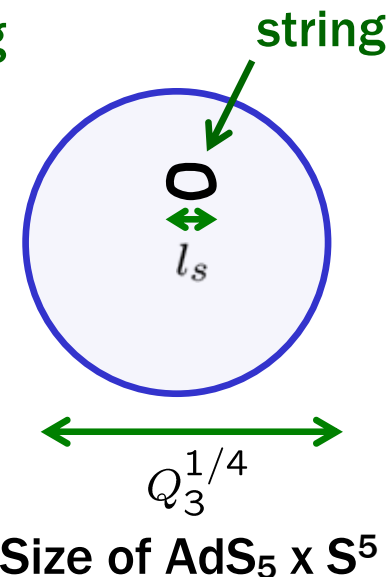
- 特に、String 側は

$$g_s \ll 1$$

$$l_s \ll Q_3^{1/4} \quad \text{の時、}$$

古典的な超重重力理論による近似が良くなる。

- これはゲージ理論側では、**large N** ($\lambda \ll N_c$)
で ($1/N_c$ 展開の意味で) **強結合** ($1 \ll \lambda$)



強結合のゲージ理論が、古典的な重力理論で解析できる！
逆に、このため、直接両者の計算結果を比較するのは難しい。

★ Consistency check

N=4 Super Yang-Mills

\simeq

String theory in AdS₅ x S⁵

4dim U(N_c) gauge theory

$$A_\mu, \psi \times 4, \phi \times 6$$

AdS₅:

$$-(y^0)^2 - (y^1)^2 + \dots + (y^5)^2 = -1$$

対称性の対応:

Conformal sym $SO(2, 4)$

R-対称性 $SU(4) \simeq SO(6)$

$$\psi \times \downarrow 4 \quad \phi \times \downarrow 6$$

Isometry

$SO(2, 4) \times SO(6)$

\longleftrightarrow
対応

\downarrow
AdS₅

\downarrow
S⁵

相関関数の対応: [Gubser-Klebanov-Polyakov, Witten 1998]

$$\left\langle e^{\int d^4x \phi_0(x) \mathcal{O}(x)} \right\rangle_{\text{CFT}} = Z_{\text{string}}$$

String partition function

with $\phi(x, z) \rightarrow \phi_0(x)$
($z \rightarrow 0$)

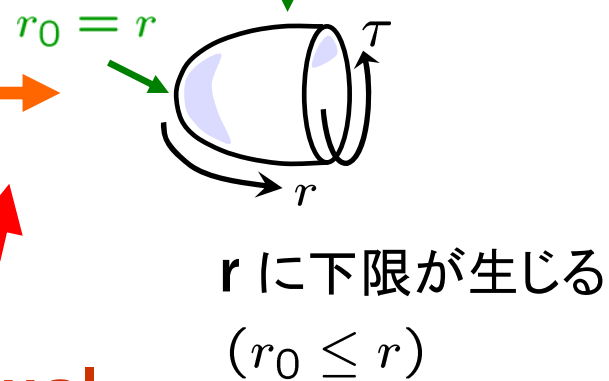
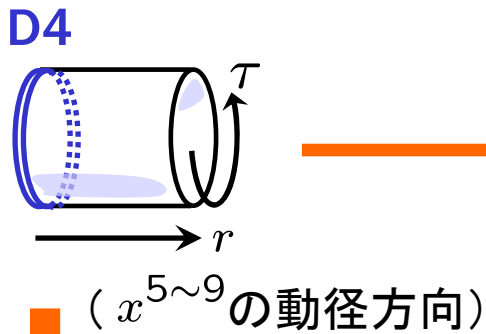
などなど、ここでは語りきれない様々な議論がある。

5 Application to QCD

★ pure Yang-Mills の超重力理論による記述 [Witten 1998]

D4-brane on S^1
 (with $\psi(x^\mu, \tau + 2\pi) = -\psi(x^\mu, \tau)$)

String theory in
 the corresponding D4 background
 (explicitly known)
 $\sim \mathbf{R}^{1,3} \times \mathbf{R}^2 \times S^4$



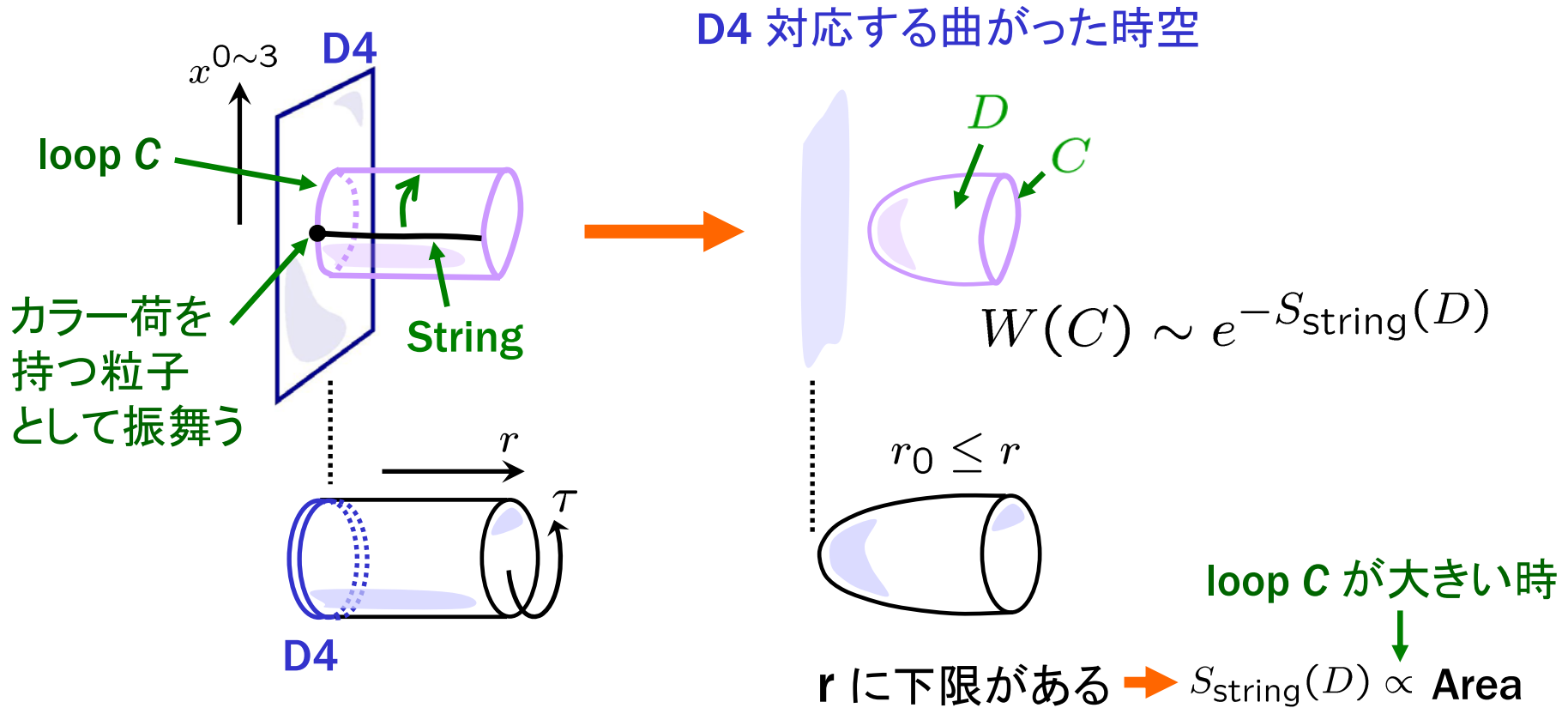
pure Yang-Mills

(at low energy)

dual

★ Wilson (Polyakov) loop

[Rey-Yee, Maldacena 1998]



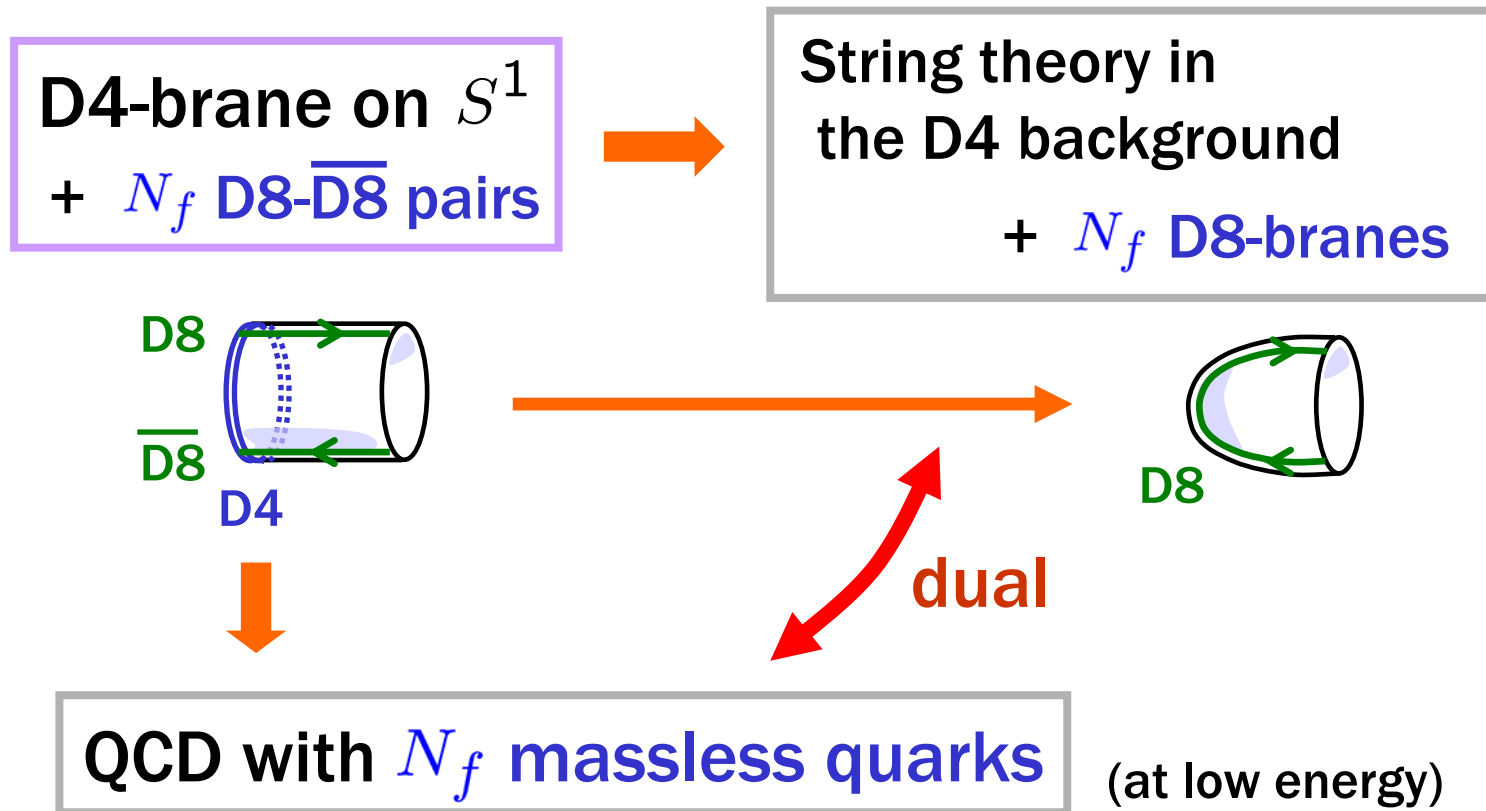
- $S_{\text{string}}(D) \propto \text{Area}$ \rightarrow confinement
- Finite temperature \rightarrow conf./deconf. transition [Witten 1998]

★ Adding quarks [Sakai-S.S. 2004]

- ここで $N_c \gg N_f$ を仮定し、“probe 近似” を用いる。

[Karch-Katz 2002]

- D4-brane をさっき用いた解に置き換える
- Quark を加えるために導入した D8-brane は brane のまま



★ Chiral symmetry breaking

[Sakai-S.S. 2004]

D4-brane を対応する超重力理論の解に置き換えると



D8 と $\overline{D8}$ は、つながって一つになる。

➡ これは chiral symmetry breaking と解釈される！

$$\begin{array}{ccc} U(N_f)_L \times U(N_f)_R & \rightarrow & U(N_f)_V \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \text{D8} & & \overline{\text{D8}} \\ & & \updownarrow \\ & & \text{connected D8} \end{array}$$

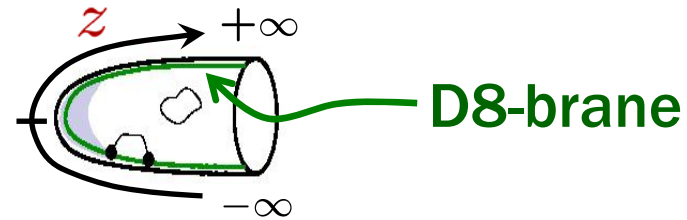
- 温度を上げていくと、Yang-Mills の conf./deconf. の転移点で chiral symmetry が回復することも示せる。

★ Hadrons in the model

今の background は

$$\mathbb{R}^{1,3} \times \mathbb{R}^2 \times S^4$$

x^μ (y, z)



D8-branes は $(x^\mu, z) \times S^4$ の方向にひろがっている

この系に含まれる粒子は

- Closed strings → glueballs
- Open strings on D8 → mesons
- D4 wrapped on S^4 → baryons

これを用いて、ハドロンに関するさまざまな計算ができる。

★ Quantitative tests for QCD

(Our model vs Experiment)

[Sakai-S.S. 2004, 2005]

[Hashimoto-Sakai-S.S. 2008]

Meson mass

mass	ρ	a_1	ρ'
exp.(MeV)	776	1230	1465
our model	[776]	1189	1607
ratio	[1]	1.03	0.911

couplings

coupling	our model	experiment
f_π	[92.4 MeV]	92.4 MeV
L_1	0.584×10^{-3}	$(0.1 \sim 0.7) \times 10^{-3}$
L_2	1.17×10^{-3}	$(1.1 \sim 1.7) \times 10^{-3}$
L_3	-3.51×10^{-3}	$-(2.4 \sim 4.6) \times 10^{-3}$
L_9	8.74×10^{-3}	$(6.2 \sim 7.6) \times 10^{-3}$
L_{10}	-8.74×10^{-3}	$-(4.8 \sim 6.3) \times 10^{-3}$
$g_{\rho\pi\pi}$	4.81	5.99
g_ρ	0.164 GeV ²	0.121 GeV ²
$g_{a_1\rho\pi}$	4.63 GeV	2.8 ~ 4.2 GeV

Properties of nucleons

	our result	exp.
$\langle r^2 \rangle_{I=0}^{1/2}$	0.742 fm	0.806 fm
$\langle r^2 \rangle_{I=1}^{1/2}$	0.742 fm	0.939 fm
$\langle r^2 \rangle_A^{1/2}$	0.537 fm	0.674 fm
$g_{I=0}$	1.68	1.76
$g_{I=1}$	7.03	9.41
g_A	0.734	1.27

Input parameter は2つだけ

- Gauge/String duality の実験的検証とも言える。
- ハドロン物理の新しい解析法とも言える。

5 Summary and Outlook

- Gauge/String duality は伝統的な場の理論の常識では考えられない新しいタイプの双対性である。
- 直接的な証明は、まだ与えられていないが、さまざまな状況証拠があり、これが偶然ということは、もはや考えられない。
- この双対性をより深く理解することは、ゲージ理論や弦理論の正体を暴く上で鍵となりうる。
- QCD への応用も、驚くほどうまくいっている。さまざまな現象が幾何学的に理解できるようになり、定量的にも期待以上に実験と良く合う。
- より精密な議論をするには、曲がった時空における弦理論の取り扱いを開発する必要がある。
- Quark を用いない、弦理論によるハドロンの記述が可能であると言っている。10次元の理論で4次元の物理を記述できると言っている。究極の物質像を探る上でも、常識を覆す新たな可能性を示唆している。